KOMMUTATIVE ALGEBRA – BLATT 6

1. Formale Potenzreihen

Sei $\Bbbk$ ein Körper. Der Ring der formalen Potenzreihen $\Bbbk[[x]]$ mit Koeffizienten in $\Bbbk$ besteht aus allen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $a_i \in \Bbbk$ mit den Operationen

$$(a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

sowie

$$(a_i) \cdot (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right)_{i\in\mathbb{N}} \qquad \text{(Cauchyprodukt)}$$

Man schreibt ein Element $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ normalerweise als Potenzreihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$. In diesem Sinne sind formale Potenzreihen Limiten von Polynomen. In der Algebra spielen Konvergenzeigenschaften solcher Reihen keine Rolle. In diesem Sinne sind sie *formal*. Iterativ konstruiert man den multivariaten Ring der formalen Potenzreihen $\Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]] = \Bbbk[[x_1, \ldots, x_{n-1}]][[x_n]]$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ lokal ist. Finden Sie dazu zunächst einen Kandidaten für das maximale Ideal und zeigen Sie, dass dieses Kandidatenideal im Jacobsonradikal enthalten ist.

2. Krull dimension

Aufgabe 2. Berechnen Sie die (Krull-)Dimension von $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass jeder Hauptidealring Dimension ≤ 1 hat.

Aufgabe 3. Sei $\Bbbk$ ein Körper. Sei $f \in \Bbbk[x, y]$ und $x' = x - y^n$. Zeigen Sie, dass $\Bbbk[x, y] = \Bbbk[x', y]$, und dass, falls n hinreichend gross ist, f als Polynom in x' und y monisch in y ist (d.h. monisch als Element von $\Bbbk[x'][y]$). Zeigen Sie, dass $\Bbbk[x, y]/f$ ganz über dem Unterring $\Bbbk[x']$ ist. Zeigen Sie damit, dass $\dim \Bbbk[x, y] = 2$. Zeigen Sie, dass für alle bis auf möglicherweise endlich viele $a \in \Bbbk$ die gleichen Aussagen auch für $x' = x - ay$ gelten.

Aufgabe 4. Sei S ein Ring, der ganz über dem Bild eines Ringhomomorphismus $R \to S$ ist. Sei M ein S-Modul. Zeigen Sie, dass die Krulldimension von M als S-Modul mit der von M als R-Modul übereinstimmt.

In den folgenden Aufgaben zeigen wir einen Noetherschen Ring unendlicher Dimension. Dieses Beispiel wurde in den 1960ern von Masayoshi Nagata gefunden.

Lemma 1. Sei S ein Ring, so dass für jedes maximale Ideal $P \subset S$ der lokale Ring S_P Noethersch ist. Falls jedes Element $s \in S$ in höchstens endlich vielen maximalen Idealen von S enthalten ist, dann ist S Noethersch.

Aufgabe 5. Zeigen Sie Lemma 1.

Aufgabe 6. Sei $\Bbbk$ ein Körper. Betrachte den Polynomring in abzählbar vielen Variablen: $R = \Bbbk[x_1, x_2, \dots]$. Sei $P_1 = (x_1, \dots, x_{d(1)})$, $P_2 = (x_{d(1)+1}, \dots, x_{d(2)})$, $\dots$, $P_m = (x_{d(m-1)+1}, \dots, x_{d(m)})$, $\dots$ eine unendliche Folge von Primidealen erzeugt von disjunkten Mengen von Variablen. Sei $U = R \setminus \bigcup_i P_i$ das Komplement der Vereinigung dieser Primideale. Die maximalen Ideale der Lokalisierung $R[U^{-1}]$ sind genau die $P_i[U^{-1}]$ (warum?). Folgern Sie, dass $\dim S = \sup\{d(m) - d(m-1) : 1 \leq m < \infty\}$. Nutzen Sie Lemma 1 um nachzuweisen, dass S Noethersch ist.