KOMMUTATIVE ALGEBRA – BLATT 5

1. Normalität

Aufgabe 1. Zeigen Sie dass faktorielle Ringe normal sind.

2. Jacobsonradikal

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass ein Ring R Jacobson ist, genau dann wenn für jedes Primideal $P \subset R$, der Ring R/P triviales Jacobsonradikal hat.

Aufgabe 3. Zeigen Sie dass $x \in R$ im Jacobsonradikal von R enthalten ist, genau dann wenn $1 - xy$ für alle $y \in R$ invertierbar ist.

3. Algebraische Gleichungen in Ringen

Aufgabe 4. Sei S ein Ring. Angenommen $s \in S$ erfüllt eine Gleichung

$$r_0 s^n + r_1 s^{n-1} + \cdots + r_n = 0$$

mit $r_i \in S$. Zeigen Sie: Falls r_n invertierbar ist, dann ist auch s invertierbar. Zeigen Sie, dass daraus Korollar 4.17 ohne Lemma 4.16 folgt.

4. Quick-and-dirty Beweis des Nullstellensatzes

Die folgenden Aufgaben führen zu einem kürzeren Beweis des Nullstellensatzes für $\Bbbk = \mathbb{C}$. Die Aufgaben sind fast unabhängig. Bearbeiten Sie auf jeden Fall Aufgabe 5.

Satz 1 (Nullstellensatz für $\mathbb{C}$)**.** Sei $I \subset \mathbb{C}[x_1 \ldots, x_n]$ ein Ideal. Dann ist $\operatorname{rad}(I) = I(Z(I))$. Die Korrespondenzen $I \to Z(I)$ und $X \to I(X)$ induzieren also eine Bijektion zwischen algebraischen Mengen in $\mathbb{C}^n$ und radikalen Idealen in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 5. Angenommen es gilt, dass jedes Primideal $P \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ Schnitt von maximalen Idealen der Form $\mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ ist. Zeigen Sie damit Korollar 1.9 und dann zusammen mit Korollar 2.12 den Satz 1.

Es bleibt also die Aussage in Aufgabe 5 zu zeigen.

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Angenommen für jedes $f \notin P$ findet man einen Punkt $p \in Z(P)$ so dass $f(p) \neq 0$. Dann folgt die Annahme in Aufgabe 5.

Aufgabe 7. Sei $f \notin P$. Zeigen Sie, dass $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ existieren, so dass mit $K' = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ und $P' = P \cap K'$ gilt: $P = P'\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie P' ist prim.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass der Quotientenkörper L von $K'[x_1, \ldots, x_n]/P'$ in $\mathbb{C}$ eingebettet werden kann. (Hinweis: L ist algebraisch über $\mathbb{Q}$!)

Aufgabe 9. Sei a_i das Bild von x_i in $\mathbb{C}$ unter der Einbettung aus Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass $p = (a_1, \ldots, a_n)$ der gesuchte Punkt für die Annahme in Aufgabe 6 ist.

Der obige Beweis funktioniert allgemein, falls statt $\mathbb{C}$ ein Körper von hinreichend hohem Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) gewählt wird. Das ist nötig für die Einbettung in Aufgabe 8. Mit Hilfe von Modelltheorie kann er sogar zu einem vollständigen Beweis ausgebaut werden, indem ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper erst zu einem im Wesentlichen äquivalenten Körper von unendlichem Transzendenzgrad ausgebaut wird.